2次体の2-類群構造の有向グラフ化について(数理モデルの組合せ論的構造)

AUTHOR(S):

河野, 美文; 中原, 徹

CITATION:

河野, 美文 ...[et al]. 2次体の2-類群構造の有向グラフ化について(数理モデルの組合せ論的構造). 数理解析研究所講究録 1993, 853: 133-147

ISSUE DATE:

1993-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/83735

数理解析研究所講究録
第853巻 1993年 133-147

2次体の2-類群構造の有向グラフ化について

河野 美文*) 中原 徹**)
*)(Kohno Yoshifumi) **)(Nakahara Toru)
*)佐賀大学工学系研究科 **)佐賀大学理工学部

§1 Introduction

2次体の狭義イデアル類群の構造, 特に, その2-part については Gauss 以来多くのアプローチがなされている. 4-rank の決定については, Rédei-reichardt[R-R] の定理が, よく知られている. また, そのグラフ版も Lagarias[L] によって導入され, グラフの類型による 4-rank の決定や グラフ上の ζ 関数 を用いた 4-rank の有無の判定などが, なされている.([O],[K-K-N])

8-rank についての研究は, Rédei ([R1][R2]) にはじまり, 彼は, 任意の 3 整数 (a,b,c) $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して 2-rank= a , 4-rank= b , 8-rank= c となる無限個の実2次体の存在を示した. 2-rank $=1$ の場合, 即ちイデアル類群の 2-part が, 巡回群となる場合は, 8-rank の判定を与える多くの結果があるが, それらはすべて ある Diophantaine 方程式の解 という形で与えられている.

§§2-3 においては, P.Morton ([M2],[M3],[M4],[M5],[M6]) P.Stevenhagen ([St1],[St2]) による次の Conjecture に対する応答及びそのグラフ化の試みについて述べる. §4 で我々の例を与える. P.Morton の結果については, [K] に詳述されている.

Conjecture (Cohn-Lagarias [C-L])

d を $d \not\equiv 2 \bmod 4$ である任意の整数とし, w を 2 巾の自然数とする. このとき, 有理数体上のある正規拡大 $M/\boldsymbol{Q}$ が存在して, d を割らない奇素数 p で $dp \equiv 0,1 \bmod 4$ なるものに対して 次の性質が成り立つ. 即ち,
$\boldsymbol{Q}\sqrt{dp}$ のイデアル類群 $\mathcal{C}(dp)$ の 2-part の w-rank が $M/\boldsymbol{Q}$ における p の Frobenius class のみによって決定される.

Remark 1-1
ここで Frobenius class は, $M/\boldsymbol{Q}$ のガロア群 $Gal(M/\boldsymbol{Q})$ の ある共役類 $\{\tau\sigma\tau^{-1};\tau \in Gal(M/\boldsymbol{Q})\}$ であり, その元 σ は 次の性質を満たす :

$$^{\forall}x \in M\text{に対し}, x^{\sigma} \equiv x^{p} \bmod \mathcal{P},\ \ p \in \mathcal{P} : M\text{の素イデアル}.$$

Definition 1-1 ([C-L])

$D \not\equiv 2 \bmod 4$ である任意の整数 d と, 2 巾の自然数 $w = 2^{j}$ に対して, 有理数体上の正規拡大 $M/\boldsymbol{Q}$ が存在して, d を割らない奇素数 p で $dp \equiv 0,1 \bmod 4$ なるものに対して, Conjecture がなりたつとき, その中の最小の体 M を Governing-field (支配体) と呼び $\Omega_j(d)$ と表す.

§2 Governing-field と 有向グラフ (1)

Rédei は 2 次体 $Q(\sqrt{d})$ に於ける 2 類群の 4-rank,8-rank を d-分解と 2 次の乗法的記号 $\{a_1, a_2, a_3\}$ ('条件付きアルティン記号' と呼ばれる) によって特徴付けた. この記号は Q の 8 次拡大に於ける素数の分解に密接に関係している.

そこで, 我々は以下のような 2 次体 $\Omega = Q(\sqrt{-dq})$ に於けるイデアル類群 C に対して C/C^8 の構造を考える. 後に同様の議論が実 2 次体 $Q(\sqrt{dq})$ においてもできることに触れる.

$$(2.1) \qquad d = p_1 \cdots p_r$$

$$(2.2) \quad p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4), \quad \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = +1 \text{ for } i \neq j$$

$$(2.3) \quad q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$$

次の定理がこの節の目標である.

Theorem (Morton)

虚 2 次体 $Q(\sqrt{-dq})$ に対して $^{\exists}\ \Sigma_d/Q$ s.t.

$$\left(\frac{\Sigma_d/Q}{q}\right) : \text{Artin 記号}$$

によって C/C^8 の構造 が決定される. ここで Σ_d は拡大次数 $2^{\binom{r}{2}+2r}$ 次のガロア拡大で d のみによって決まる.

ここで, 与えられた 2 次体の類群の 8-rank までの構造

$$G = C/C^8$$

を計算する為に必要ないくつかの Lemmas を用意する. Rédei のアルゴリズムである.

Lemma 2-1

G : 有限アーベル群
$\chi_1, \cdots, \chi_r$: X_2の基底 (X_2; G 上の 2 次指標の全体)
$a_1, \cdots, a_r$: A_1の基底 (A_1; G の位数 2 の元の全体)

$\Longrightarrow$

$$G \text{ の 4-rank } e_4 = s.$$

ここで, s は 行列 $M = (\xi\chi_j(a_i))$ $(1 \leq i, j \leq r)$

$$\xi : \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbf{F}_2 \quad (\xi(1) = 0, \xi(-1) = 1)$$

に対し $s = r - \mathrm{rank}M$ で決める.

Lemma 2-2

$M = (\xi\chi_j(a_i))$ $(1 \leq i, j \leq r, a_i \in A_1)$ に対して,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

と変形出来,$I = (r-s) \times (r-s)$ 単位行列とするならば,$\chi_1, \ldots, \chi_s$ は G の指標群 X において平方根をもつ全ての元の集合の生成系となる. そのとき,

$$e_8 = s - \rho \ : \ G \text{ の 8-rank}$$

ここで ${b_i}^2 = a_i$ $(1 \leq i, j \leq s)$ を用いてρ は $M' = (\xi\chi_j(b_i))$ の rank とする.

Lemma 2-3

$\Omega = \boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta}), \Delta$ は 判別式 とすると, Ω における狭義イデアル類群 $\mathcal{C}$ の 2 次指標群 X_2 は次のようになる.

$$X_2 = < \chi_{p_1}, \cdots, \chi_{p_{(t-1)}} >, \ \chi_{p_i}(\mathcal{A}) = \left(\frac{N\mathcal{A}, \Delta}{p_i}\right), \ (p_i | \Delta)$$

ここで $t = \sharp\{p;\ p|\Delta\}, \mathcal{A}$ は Ω における任意の分数イデアル, $\left(\frac{a,b}{p_i}\right)$ は ヒルベルト記号. 更にいわゆる '積公式'

$$\prod_{p_i|\Delta} \chi_{p_i}(\mathcal{A}) = 1$$

が成り立ち, $\mathcal{C}$ の $2 - \mathrm{rank} = t - 1$ である.

Remark 2-1

$a, b \in \boldsymbol{Z}(a \neq 0, b \neq 0), p$ を素数とする. b が 平方数であれば $\left(\frac{a,b}{p}\right) = +1, b$ が 平方数でなければ $\left(\frac{a,b}{p}\right) = \pm 1$ で, $+1$ となるのは a が任意の $p^e (e = 1, 2, \ldots)$ を法として 2 次体 $k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$ の或る整数β_e の ノルム と合同であること :

$$a \equiv N_{k/\boldsymbol{Q}}\beta_e \ (\mathrm{mod} p^e) \ \ (e = 1, 2, \ldots)$$

と定める. その他の場合には, -1 とする.

Lemma 2-4 各 $p_i|\Delta$ に対して,$^{\exists}\mathcal{P}_i$: Ωの素イデアル , s.t.

$$\mathcal{P}_i^2 = (p_i)$$

となるが, A_1を, 2 乗して単項イデアルとなるイデアルの類よりなる群とすると,

$$A_1 = < \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_t >, \ \prod_{p_i|\Delta} \mathcal{P}_i^{\varepsilon_{p_i}} \sim 1, \quad \varepsilon_{p_i} = 0 \text{ or } 1.$$

但し, 同値関係 ' ~ ' は, 次のように定義される:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Longleftrightarrow {}^{\exists} \alpha \in \Omega, \text{ s.t. } \mathcal{A} = (\alpha)\mathcal{B},\ N\alpha > 0,\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{はΩのイデアル.}$$

Lemma 2-5

$$\mathcal{A} = \prod_{p_i|\Delta} \mathcal{P}_i^{r_{p_i}}, \quad r_{p_i} = 0 \text{ or } 1.$$

但し, 全ての $r_{p_i} = 0$ ではないとする.
また,$\mathcal{A}$ が あるイデアルの平方となり, $a = N\mathcal{A}$, 更に (x, y, z) は次式の原始解とする.

$$x^2 - \Delta y^2 - 4az^2 = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$${}^{\exists}\mathcal{B}^2 \sim \mathcal{A}, \text{s.t. } N\mathcal{B} = z$$

Lemma 2-6

$$d \equiv 1(\text{mod } 4),\ \gamma = \frac{x + y\sqrt{d}}{2} \text{ は } Q(\sqrt{d}) \text{ の 整数},\ (\gamma, 2) = 1$$

$$\Longrightarrow$$

$$\gamma^3 = u + v\sqrt{d},\ u, v \in Z$$

以上は,Rédei のアルゴリズムを 2 次体 $\Omega = Q(\sqrt{\Delta})$ の狭義イデアル類群 $\mathcal{C}^+$ に適用したものである. ここから, 判別式 $\Delta = -qd$ の場合を考察する. 但し,d, q は, 次の条件を満たすとする.

(2.1) $\quad d = p_1 \ldots . p_r$

(2.2) $\quad p_i \equiv 1(\text{mod } 4),\ \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = +1 \text{ for } i \neq j$

(2.3) $\quad q \equiv 3(\text{mod } 4)$

まず, Lemma 2-3 より $e_2 = r$, また Lemma 2-1,3 より $e_4 = s$, 但し

$$s = \sharp\{p_i; \left(\frac{q}{p_i}\right) = +1\}$$

更に, $e_8 = s - \rho$ 但し,

$$\rho = \text{rank}M',\ M' = (\xi\chi_j(\mathcal{Z}_i)),\ (1 \leq i, j \leq s)$$

ここで, $\mathcal{Z}_i^2 \sim \mathcal{P}_i$, $(1 \leq i \leq s)$.

次いで, 以下の Lemmas により $\chi_j(\mathcal{Z}_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ の 4 乗剰余記号 $\left(\frac{a}{p}\right)_4$ を用いた 表現を与える. 但し 4 乗剰余記号は $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ なる素数 p と 法 p の平方剰余 a に対しては

$$\left(\frac{a}{p}\right)_4 \equiv a^{\frac{p-1}{4}} (\mathrm{mod} p)$$

と定義され, $\left(\frac{a}{p}\right)_4 = 1$ (a : 法 p の 4 乗剰余), または, $= -1$ (a : 法 p のその他の 平方剰余) となる.

Lemma 2-7 次が成り立つ :

$$\chi_i(\mathcal{Z}_i) = \left(\frac{d/p_i}{p_i}\right)_4 \cdot \left(\frac{-q}{p_i}\right)_4 \quad (1 \leq i \leq s).$$

(pf)

Lemma 2-3,5 より $\chi_i(\mathcal{Z}_i) = \left(\frac{z}{p_i}\right)$ であり, (x, y, z) は, 次式の $z > 0$ なる原始解である.

$$x^2 + dqy^2 - 4p_i z^2 = 0$$

Lemma 2-6 を用い, Lemma の式は得られる.

Lemma 2-8

$\mathcal{R}_{ij}, \mathcal{D}_{ij}, \mathcal{Q}_{ij}$ を $Q(\sqrt{p_i p_j})$ における次式を満たす整イデアルとする, 但し $(1 \leq i, j \leq s)$.

$$\mathcal{D}_{ij}\mathcal{D}'_{ij} = \frac{d}{p_i p_j},\ \mathcal{Q}_{ij}\mathcal{Q}'_{ij} = q,\ \mathcal{D}_{ij}\mathcal{Q}_{ij}\mathcal{R}_{ij}^2 \sim 1\ (Q(\sqrt{p_i p_j}) \quad \text{において})$$

ここで, $(\mathcal{R}_{ij}, 2Dq\mathcal{R}'_{ij}) = 1$ である. このとき

$$\begin{aligned} \chi_j(\mathcal{Z}_i) &= \left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4 \cdot \left(\frac{r_{ij}}{p_j}\right) \qquad (r_{ij} = N\mathcal{R}_{ij}) \\ &= \left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4 \cdot \left(\frac{p_j}{p_i}\right)_4 \cdot \chi_i(\mathcal{Z}_j) \qquad (i \neq j) \end{aligned}$$

(pf)

Lemma 2-7 と同様.

以下の Lemmas によって, $\chi_j(\mathcal{Z}_i)$ の値が, Q 上の適当な Galois 拡大における q の分解のみによることを示す.

Lemma 2-9

$$H_i = \{r \in Q; (r, 4p_i) = 1, \left(\frac{r}{p_i}\right) = \left(\frac{r^*}{p_i}\right)_4 = 1\}$$

$r^* = rv(r)$, $v(\neq 1)$: modulo 4 の指標

K_i : H_iに対応するQ上のアーベル拡大, 即ち mod H_iの ray class field.

$\sigma_i(\neq 1) \in \mathrm{Gal}(K_i/Q(\sqrt{p_i}))$. $\quad (1 \leq i \leq s)$

$\Longrightarrow$

$\chi_i(\mathcal{Z}_i)$ は Artin symbol $\left(\frac{K_i}{q}\right)$ のみによって決まる．特に

$$\chi_i(\mathcal{Z}_i) = \left(\frac{d/p_i}{p_i}\right)_4 \cdot (-1)^{a_i}, \text{ ここで } \left(\frac{K_i}{q}\right) = \sigma_i^{a_i}, a_i = 0 \text{ or } 1.$$

Lemma 2-10

$L_{ij} : \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})$ の 種の体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i}, \sqrt{p_j})$ の 2 次拡大

$\lambda_{ij}(\neq 1) \in \mathrm{Gal}(L_{ij}/\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i}, \sqrt{p_j}))$

$\delta_{ij} \in \mathrm{Gal}(L_{ij}/\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})$

$$\delta_{ij} := \left(\frac{L_{ij}/\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})}{\mathcal{D}_{ij}}\right) : \text{Artin 記号}$$

$\delta_{ij} = 1$ or λ_{ij}. $(1 \leq i, j \leq s,\ i \neq j)$

$\Longrightarrow$

$$\chi_j(\mathcal{Z}_i) = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4 \cdot (-1)^{b_{ij}}.$$

ここで $\left(\frac{L_{ij}/\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})}{\mathcal{Q}_{ij}}\right) = \delta_{ij} \cdot \lambda_{ij}^{b_{ij}}$, $b_{ij} = 0$ or 1.

Lemma 2-11

$h_i : \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i})$ の 類数

$\mathcal{P}_{ij} : \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i})$ における p_j上の素イデアル

$\mathcal{P}_{ij}^{3h_i} = (\beta_{ij}),\ \beta_{ij} = x + y\sqrt{p_i},\ N\beta_{ij} = p_j^{3h_i} > 0$

$(1 \leq i, j \leq s)$

$$x \equiv \begin{cases} +1 \pmod 4 & \text{if } y \equiv 0 (\mathrm{mod} 4) \\ -1 \pmod 4 & \text{if } y \equiv 2 (\mathrm{mod} 4) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$L_{ij} = \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j},\ \sqrt{\beta_{ij}}).$$

Definition 2-1

ここで，以下のように記号を定める．

$K_{d+} = K_i$の 合成体 , $(1 \leq i \leq s)$

$\Lambda_{d+} = L_{ij}$の 合成体, $(1 \leq i \leq s)$

$\Omega_{d+} = \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_s})$, $\Sigma_{d+} = K_{d+}\Lambda_{d+}$.

上記の各体は, 全て d の 因子 d^+ のみによって定まり, q には依らない.

また,

$$\Sigma_{d+} \subseteq \Sigma_d,$$

であり, $K_{d+}, \Lambda_{d+}, \Omega_{d+}$ についても同様である. 更に,Lemma 5-9, 10 より 全て $\boldsymbol{Q}$ 上 ガロア拡大となる.

Thorem 2-1 (Morton [M2])
d , q は, (2.1), (2.2), (2.3) を満たすとする. また $\mathcal{C}$ は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-dq})$ の類群とする.
$\Longrightarrow$
$\mathcal{C}/\mathcal{C}^8$ は 下の Artin 記号 によって完全に決定される.

$$\left(\frac{\Sigma_d/\boldsymbol{Q}}{q}\right), \quad (\Sigma_{d+} \subseteq \Sigma_d)$$

ここで, Artin 記号の性質より以下のように表せる.

$$\left(\frac{\Sigma_d/\boldsymbol{Q}}{q}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Omega_d/\boldsymbol{Q}}{q}\right) & \text{on } \Omega_d \\ \left(\dfrac{K_i}{q}\right) & \text{on } K_i, \quad 1 \leq i \leq s, \\ \left(\dfrac{L_{ij}/\boldsymbol{Q}}{q}\right) & \text{on } L_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq s \end{cases}$$

最後に, $\mathcal{Q}_{ij}$ が $\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})$ における q の素因子イデアルとすると

$$\left(\frac{L_{ij}/\boldsymbol{Q}}{q}\right) = \left(\frac{L_{ij}/\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_ip_j})}{\mathcal{Q}_{ij}}\right).$$

以上のように $\mathcal{C}/\mathcal{C}^8$ の構造は governing field Σ_d における q の分解のみによっている事がわかった. また $\mathcal{C}/\mathcal{C}^8$ が, 与えられた構造を有するときの $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ の存在の仕方は フロベニウスの密度定理によって計算可能で , Morton は次の結果も得ている.

Definition 2-2 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-dq})$ において $d'|d$, $d' = p_1 \cdots p_s$ に対して以下のような記号を定義する.

$$N(d, \rho) := \sharp\{R = (\epsilon_{ij}); \mathrm{rank}R = \rho, (-1)^{\epsilon_{ij}+\epsilon_{ji}} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4 \left(\frac{p_j}{p_i}\right)_4, 1 \leq i, j \leq s, i \neq j\}$$

$$N(1, 0) = 1$$

Theorem 2-2 (Morton [M2]) d, q は, (2.1), (2.2), (2.3) を満たすとする. $\mathcal{C}$ は $Q(\sqrt{-dq})$ の類群とし, $0 \leq \rho \leq s \leq r$ に対して, 下の事が成り立っているとする.

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}^8 \cong C_2^{(r-s)} \times C_4^{(\rho)} \times C_8^{(s-\rho)}$$

但し, $C_n^{(m)}$ は, 位数 n の巡回群 m 個の積を表す.

$$\Longrightarrow \quad \partial(d,s,\rho) = 2^{-\binom{s}{1}-r-s-1} \sum_{\substack{d'|d \\ \nu(d')=s}} N(d',\rho)$$

但し, $\nu(d')$ は d' の素因数の数を表す. また $\partial(*)$ は密度を表す.

同様のことが, 実 2 次体 $Q(\sqrt{dq})$,

$$(2.4) \qquad d = p_1 \ldots . p_r$$

$$(2.5) \quad p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8), \quad \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = +1 \text{ for } i \neq j$$

$$(2.6) \quad q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$$

に対しても成り立つ事が Morton [M4] によって示されている. 更に, 実 2 次体においては単数のノルムと狭義イデアル類群の 2-part の構造とが密接に関係していることが指摘されている. 即ち, Rédei は [R1] において次のことを示している.

$$\mathrm{Norm}\ \eta_q = -1 \Longleftrightarrow \mathcal{C}_q; \{2, \ldots, 2\} \text{ 型アーベル群}$$

但し, η_q は $Q(\sqrt{dq})$ の単数, $\mathcal{C}_q$ は $Q(\sqrt{dq})$ のイデアル類群の 2-part である. Morton はこの結果を更に押し進めた. 以下の定理である.

Theorem 2-3 (Morton [M4])
d, q は, (2.4) , (2.5) , (2.6) を満たしているとする. このとき

$$T: \text{ 2-rank} = r \text{ の有限アーベル 2 群}$$

とする. 但し, T の 8-rank 以上はないとする. また $\varepsilon = \pm 1$ を表す.

$\Longrightarrow$

$$\partial(\{q: \text{ 素数 }; \mathcal{C}_q \cong T, \ \mathrm{Norm}\ \eta_q = \varepsilon\}) > 0$$

上の定理は, 一般にイデアル類群の 2-part $\mathcal{C}_q$ のみでは η_q の符号が決まらないことも示している.

§ 3 Governing-field と 有向グラフ (2)

p, q_1, q_2 は 素数とする. P.Morton [M5] は, 次の 2 次体

$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{-q_1q_2p}) \quad (p \equiv q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 4)$$

の 2 イデアル類群の 8-rank までの governing-field を決定し, 有向グラフを用いた reciprocity theorem を与えた. まず初めに, [C-L] においてなされた予想について述べ governing field の明確な定義を述べる.

Conjecture $C_j(d)$ ([C-L])

d ($\not\equiv 2 \pmod 4$) $\in \boldsymbol{Z}$に対し次のような体 K が存在する.

$K = K_j(d)$: Galois/$\boldsymbol{Q}$であり次の条件 $P_j(d)$ を満たす ($j \in \mathbf{N}$)

$P_j(d)$:
- もし p_1, p_2 : 素数, $(d, p_i) = 1$
- s.t.$[(K/\boldsymbol{Q})/(p_1)] = [(K/\boldsymbol{Q})/(p_2)]$
- $\Longrightarrow$
- $C_2(dp_1), C_2(dp_2)$: 2^k-rank が等しい $(1 \leq k \leq j)$

但し, $[(K/\boldsymbol{Q})/(p_i)]$: Frobenius class

i.e. $[(K/\boldsymbol{Q})/(p_i)] = \bigcup_{p_i \subseteq \mathbf{P}_i}\{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})\ ;\ x^\sigma \equiv x^{p_i} (\mathrm{mod}\mathbf{P}_i) \text{ for } {}^\forall x \in \mathcal{O}_K\}$

$C_2(dp_i)$: $\boldsymbol{Q}(\sqrt{dp_i})$ のイデアル類群における 2-sylow 部分群

$j = 3$ のときは, 2-類群が巡回群となる全ての d に対して, また 先に触れたように,

$$d = -p_1p_2...p_k, \quad p_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4), \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1, (i \neq j)$$

$$d = p_1p_2...p_k, \quad p_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 8), \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1, (i \neq j)$$

となるときは Morton ([M2], [M3], [M4]) によって具体的に拡大体を構成することによって証明された. また, 任意の d ($\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$) に対しては, $j = 3$ のとき Stevenhagen ([St1],[St2]) によって存在証明が与えられた. 彼は Morton の idea を用いて 一般化された類体論, 即ちイデールを用いた類体論によって証明した. 以下の定理である.

Theorem 3-1 ([St1])

d を $d \not\equiv 2 \bmod 4$ なる任意の $0, \pm 1$ でない整数とする. そのとき体 K を次のように 定義する.

$$K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{q} : q \text{は } q|d \text{なる 素判別式すべてをわたる }).$$

そのとき, $Dp \equiv 0, 1 \bmod 4$, なる 素数 p に対して 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{dp})$ の狭義イデアル類群 $\mathcal{C}(dp)$ のなす商群 $\mathcal{C}(dp)/\mathcal{C}(dp)^8$ の構造は次のように決定される. 即ち, それは K の 最大アーベル拡大体における p の Frobenius class のみによって決定される. その体は K 上 $2d \cdot \infty$ 以外では不分岐で K 上 exponent 2 のガロア群をもつ.

したがって, 以下の議論において $8-rank$ の Governing field の存在は保証されている.

最小の $K_j(d)$ の存在は次の定理によって与えられる.

Theorem 3-2 ([C-L])
各 j (固定) に対して ${}^{\exists}K_j^{(\lambda)}(d), \lambda \in \Lambda$(: 適当な添数集合); Galois/$\boldsymbol{Q}$, s.t. $P_j(d)$ を満たす.
$\Longrightarrow$
$\Omega_j(d) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_j^{(\lambda)}(d)$; Galois/$\boldsymbol{Q}$, $P_j(d)$ を満たす最小の体.

Definition 3-1 $\Omega_j(d)$ のことを governing field と呼ぶ.

[C-L] においては, 任意に与えられた有限アーベル 2-群 G と同型な 2-類群の存在密度についても予想が与えられている.

Density Conjecture $D_j(d)$ ([C-L])

$$\begin{aligned} &d\ (\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)) \in \boldsymbol{Z} \\ &G = \prod_{i\in I} G_i : \text{アーベル 2-群} \\ &G_i : \sharp G_i \leq 2^{j-1} (j \in \mathbf{N}) \text{ となる巡回群} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\Sigma_j(d, G) = \{(p); C_2(dp) \cong G\} : \text{有理数値の存在密度をもつ.}$$

ここに 密度は $\sharp\{(p); C_2(dp) \cong G\}/\sharp\{p; dp\ 2\text{次体の判別式}\}$ で与えられる. そして, 最後に $\Omega_3(21)$ について次の 予想を与えた. 後で述べるようにこの予想は Morton ([M5]) によって更に一般化された形で証明された.

Conjecture 3-1 (Cohn-Lagarias) (Theorem 2-5 に含まれる.)

$p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ と仮定すると

$$\mathcal{C}(-21p)/\mathcal{C}(-21p)^8 \cong \boldsymbol{Z}_8 \times \boldsymbol{Z}_2$$

と成るための必要十分条件は以下の (A),(B) または (C) が成立するときである.

$$\begin{cases} (A)\ \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{7}\right) = +1, & p:\ K_A = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-3}, \sqrt{-7}, \sqrt{-2(3+\sqrt{21})}\right) \text{で完全分解} \\ (B)\ \left(\frac{p}{3}\right) = +1, \left(\frac{p}{7}\right) = -1, & p:\ K_B = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-3}, \sqrt{7}, \sqrt{1+2\sqrt{7}}\right) \text{で完全分解} \\ (C)\ \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{7}\right) = -1, & p:\ K_C = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{2(7+\sqrt{21})}\right) \text{で完全分解} \end{cases}$$

以下ではこの節の目的である Morton ([M5]) により与えられた諸定理を述べる. 特に判別式が 3 素因数からなる場合に reciprocity theorem と そのグラフ化を示す.

Theorem 3-3 (Morton [M5])

$p \equiv q_1 \equiv q_2 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4), \left(\frac{q_2}{q_1}\right) = +1$ と仮定すると

$$\mathcal{C}(-q_1q_2p)/\mathcal{C}(-q_1q_2p)^8 \cong \boldsymbol{Z}_8 \times \boldsymbol{Z}_2$$

と成るための必要十分条件は以下の (A), (B) または (C) が成立するときである.

$$\begin{cases} (A)\ \left(\dfrac{p}{q_1}\right)=\left(\dfrac{p}{q_2}\right)=+1, \\ \qquad\qquad p:\ K_A(q_1,q_2)\text{ で完全分解} \\ (B)\ \left(\dfrac{p}{q_1}\right)=+1,\left(\dfrac{p}{q_2}\right)=-1, \\ \qquad\qquad p:\ K_B(q_1,q_2)\text{ で完全分解} \\ (C)\ \left(\dfrac{p}{q_1}\right)=\left(\dfrac{p}{q_2}\right)=-1, \\ \qquad\qquad p:\ K_C(q_1,q_2)\text{ で完全分解} \end{cases}$$

ここで, K_A, K_B, K_C は次の体である.

$$\begin{aligned} K_A(q_1,q_2) &= \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-q_1},\sqrt{-q_2},\sqrt{\pi_{12}}\right) \\ K_B(q_1,q_2) &= \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-q_1},\sqrt{q_2},\sqrt{\pi_1}\right) \\ K_C(q_1,q_2) &= \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{q_1},\sqrt{q_2},\sqrt{-\varepsilon_2\sqrt{q_2}\pi_1}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

更に $\pi_{12}, \pi_1, \varepsilon_2$ は, 次のように定められる. N は $k_*/\boldsymbol{Q}$ のノルムとする.

$$\begin{cases} \mathrm{N}_{k_{12}/\boldsymbol{Q}}\pi_{12}=-q_1 & (k_{12}=\boldsymbol{Q}(\sqrt{q_1q_2})) \\ \quad \pi_{12}\equiv\left(\dfrac{2}{q_1}\right)(\mathrm{mod}\ 4) & \\ \mathrm{N}_{k_2/\boldsymbol{Q}}\pi_1=-q_1^{h_2} & (k_2=\boldsymbol{Q}(\sqrt{q_2})) \\ \quad h_2=k_2\text{の類数} & \\ \quad \pi_1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2) & \\ \quad \pi_1<0,\ (\sqrt{q_2}>0\text{ に対し}),\ (\pi_1,1-a\sqrt{q_2})\neq 1,\ a^2q_2-b^2q_1=1,\left(\dfrac{q_2}{q_1}\right)=+1. & \\ \quad \varepsilon_2>1:k_2\text{の基本単数} & \end{cases}$$

もし, $\left(\dfrac{p}{q_1}\right)=-1, \left(\dfrac{p}{q_2}\right)=+1$ と仮定すると,

$$\mathcal{C}(-q_1q_2p)/\mathcal{C}(-q_1q_2p)^8\cong \boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2$$

また, もし (A) から (C) の Legendre 記号条件のうちの一つが満たされるが, p が対応する体において分解しないならば

$$\mathcal{C}(-q_1q_2p)/\mathcal{C}(-q_1q_2p)^8\cong \boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_4$$

以上の結果と拡大次数に関する考察を併せて $K=K_AK_BK_C$ が $\mathcal{C}(-q_1q_2p)/\mathcal{C}(-q_1q_2p)^8$ の構造を決定する governing field $\Omega_3(-q_1q_2)$ となることが示される. 即ち次の定理である.

Theorem 3-4 (Morton [M5])

$K = K_A K_B K_C$, 但し,

$$K_A(q_1,q_2) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-q_1},\sqrt{-q_2},\sqrt{\pi_{12}}\right),$$
$$K_B(q_1,q_2) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-q_1},\sqrt{q_2},\sqrt{\pi_1}\right),$$
$$K_C(q_1,q_2) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{q_1},\sqrt{q_2},\sqrt{-\varepsilon_2\sqrt{q_2}\pi_1}\right)$$

のように Theorem 3-2 と同様に定める. そうすると K は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$ を含み $\mathcal{C}(-q_1q_2p)/\mathcal{C}(-q_1q_2p)^8$ の構造を決定する $\boldsymbol{Q}$ 上最小な Galois 拡大体 であることがわかる.

$$\text{i.e.}\quad \Omega_3(-q_1q_2) = K = K_AK_BK_C$$

である.

最後に 3 素数 q_1,q_2,p は 全て法 4 で 3 と合同なので, p を q_3 で置き換えると $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-q_1q_2q_3})$ は q_1,q_2,q_3 について対称に扱える. 従って, 以下のように有向グラフを定義すると Theorem7-2 はグラフ表現され, ある種の相互法則を与える.

Definition 3-2 (Morton [M5])

$q_i \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $(i = 1,2,3)$ に対して

$$\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = +1, \left(\frac{q_3}{q_2}\right) = +1, \left(\frac{q_2}{q_1}\right) = +1 \tag{3.2}$$

となるとき quadratic cyclic triple といい, そのようになる順序がないとき noncyclic という.

Definition 3-3 (Morton [M5])

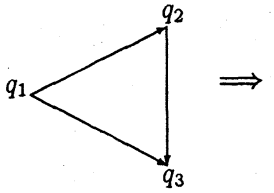
頂点集合 $\{q_1,q_2,q_3\}$ からなる有向グラフ G の有向辺を以下のように定義する :
グラフ G の有向辺 (q_i,q_j) (q_i から q_j) は $\left(\frac{q_j}{q_i}\right) = +1$ という条件によって定められる.

Proposition 3-1 (Morton [M5])

(q_1,q_2,q_3) が cyclic (resp. noncyclic) のとき, またそのときのみグラフ G が cyclic (resp. noncyclic) である.

Theorem 3-5 (reciprocity theorem) (Morton [M5])

(q_1,q_2,q_3) : non-cyclic triple, $q_i \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $(i = 1,2,3)$ に対して次のような有向グラフが対応しているとする.



$\Longrightarrow$ $q_1 : K_C(q_2,q_3)$ において完全分解
$\Longleftrightarrow$ $q_2 : K_B(q_1,q_3)$ において完全分解
$\Longleftrightarrow$ $q_3 : K_A(q_1,q_2)$ において完全分解

ここで, K_A, K_B, K_C は (3.1) 式で定められたものである.

Remark 3-1

theorem3-2 より

$$\mathcal{C}(-q_1q_2q_3)/\mathcal{C}(-q_1q_2q_3)^8 \cong \boldsymbol{Z}_8 \times \boldsymbol{Z}_2$$

となる.

Remark 3-2

(q_1, q_2, q_3) が cyclic のとき

$$\mathcal{C}(-q_1q_2q_3)/\mathcal{C}(-q_1q_2q_3)^8 \cong \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2$$

となる.

§ 4 Exampls

ここでは, 前節で示された P.Morton の結果を基にして素数 p, q_j $(1 \leq j \leq 3)$ に対し, 次の 2 次体

$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{-q_1q_2q_3p}) \quad (p \equiv 1(\mathrm{mod}4), q_i \equiv 3(\mathrm{mod}4))$$

のイデアル類群の 2-part の 8-rank に対する Governing-field を探り, いくつかの実験例を与える.

Case 4-1

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = \left(\frac{q_3}{q_2}\right) = \left(\frac{q_1}{q_3}\right) = +1, \left(\frac{p}{q_j}\right) = +1, \quad (1 \leq j \leq 3) \tag{4.1}$$

のとき,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M' = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

したがって, $e_4 = 1$ となり

$$e_8 = 1 \Longleftrightarrow \chi_1\chi_2\chi_3(\mathcal{Z}) = +1, (\mathcal{Z}^2 \sim \mathcal{P}, \mathcal{P}\text{は p 上の素イデアル})$$

χ_i の定義 及び **Lemma 2-1** より

$$\chi_1\chi_2\chi_3(\mathcal{Z}) = \left(\frac{z}{q_1}\right)\left(\frac{z}{q_2}\right)\left(\frac{z}{q_3}\right).$$

ここで, (x, y, z) は 次の不定方程式の正の原始解である.

$$x^2 + q_1q_2q_3py^2 - 4pz^2 = 0$$

Example 4-1

$q_1=3, q_2=7, q_3=11$ とすると，これらは (4.1) 式の条件を満たす. $p_1=421, p_2=2269$, $p_3=2731, p_4=8737$ に対して，$\mathcal{C}_j$ 及び h_{k_j} を それぞれ 2 次体 $k_j=\boldsymbol{Q}(-3\cdot 7\cdot 11\cdot p_j)$ の類群及び 類数とすると

$$
\begin{aligned}
h_{k_1} &= 64 = 2\times 2\times 16, \quad i.e. \quad \mathcal{C}_1 \cong \boldsymbol{Z}_{16}\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.\\
h_{k_2} &= 192 \equiv 0 \bmod 2^6. \quad i.e. \quad \mathcal{C}_2 \cong \boldsymbol{Z}_{48}\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.\\
h_{k_3} &= 768 \equiv 0 \bmod 2^8, \quad i.e. \quad \mathcal{C}_3 \cong \boldsymbol{Z}_{32}\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.\\
&\qquad\qquad\qquad\quad or\ \mathcal{C}_3 \cong \boldsymbol{Z}_{16}\times \boldsymbol{Z}_4\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.\\
&\qquad\qquad\qquad\quad or\ \mathcal{C}_3 \cong \boldsymbol{Z}_8\times \boldsymbol{Z}_8\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.\\
h_{k_4} &= 928 \equiv 0 \bmod 2^5, \quad i.e. \quad \mathcal{C}_4 \cong \boldsymbol{Z}_8\times \boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{Z}_2.
\end{aligned}
$$

となる.

References

[B-C] P.Barrcand and H.Cohn, *Note on primes of type x^2+32y^2, class number and residuacity*, J. reine Angew. Math. **238** (1969), 67-70.

[C-L] H.Cohn and J.C.Lagarias, *On the existence of Fields Govering the 2-invariants of the Classgroup of $\boldsymbol{Q}(\sqrt{dp})$ as p Varies*,Mathematics of computation Vol.**41**.Num. 164 Oct. 1983.711-730

[K-K-N] 河野美文 (Y.Kohno), 北村三郎 (S.Kitamura), 中原 徹 (T.Nakahara), グラフによる 2 次体の類群の 2 巾階数評価, 数理解析研究所研究集会 '離散数理モデルにおける最適組合せ構造'(1992,7/14-16.) 報告集, 数理解析研究所講究録 820 (1993, 2)

[K] 河野 美文 (Y.Kohno), 2 次体の類群のグラフによる 2 巾階数評価, 佐賀大学大学院工学系研究科修士論文 (1993), 1-38.

[L] J. C. Lagarias, *On Determining the 4-Rank of the Ideal Class Group of a Quadratic Field*, J. Number Theory **12**(1980), 191–196.

[M1] P. Morton, *On Rédei's theory of the Pell equation*, J. reine Angew. Math., **307/308** (1979), 373-398.

[M2] ——, *Density results for the 2-classgroups of imaginary quadratic fields*,J. reine Angew. Math., **332**(1982),156-187.

[M3] ——,*The quadratic number fields with cyclic 2 -classgroups*, Pacific Journal of Mathematics Vol.**108**, No. 1,(1983).

[M4] ——,*Density result for the 2-classgroups and fundamental units of real quadratic field*, Studia Scie.Math.Hungarica **17** (1982),21-43.

[M5] ——,*Govering fields for the 2-classgroup of $Q(\sqrt{-q_1q_2p})$ and a related reciprocity law*,Acta Arithmetica **LV** (1990)

[M6] ——,*On the non existence of aberian conditions govering solvability of -1 Pell equation*,J.reine.Math.**405** (1990),147-155

[O] 大島 豊 (Y. Oshima), グラフの彩色多項式に関する Unimodal 予想及び 2 次体の類群の Euler グラフを用いた 4−階数評価，佐賀大学大学院理工学研究科修士論文 (1987)，1–63.

[R-R]L.Rédei und H.Reichardt,*Die Anzahl der durch* 4 *teilbaren Invarianten der Klassengroupe eines beliebigen quadratischen Zahlkörper*, J.reine Angew. Math. **170**(1933),69-74.

[R1] L.Rédei, *Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J.reine Angew. Math. **171** (1935), 131-148.

[R2] L.Rédei, *Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörpert*, J. reine Angew. Math. **180** (1939), 1-43.

[St1] P.Stevenhagen,*Class groups and govering fields*,Ph.D.thesis, Univ.of California at Berkeley,(1988).

[St2] P.Stevenhagen, *Ray class groups and govering fields*, Academisch proefschrift, Universiteit van Amsterdam, (1989)